U potrazi za skrivenom harmonijom matematike

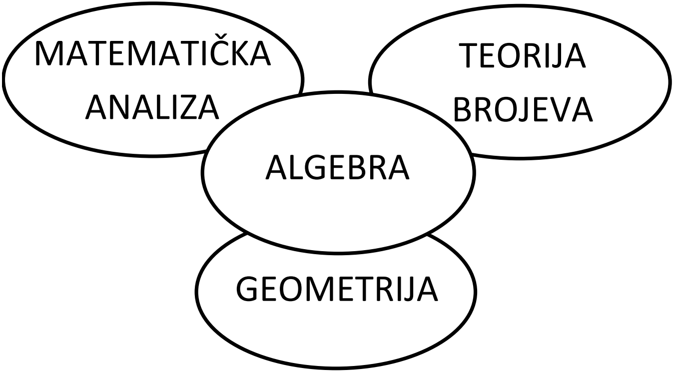
Neven Grbac
Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Skupština Matematičkog društva Istra
19. veljače 2020.

Uvod

"[...] Langlandsov program bi vrlo lako mogao biti krajnji izraz simetrije u matematici. On predviđa nevjerojatno sjedinjenje glavnih matematičkih [područja] koja su naizgled potpuno nepovezana."

Jim Arthur, University of Toronto, Kanada
Harmonic Analysis in Mathematics, *Ideas* **2** (2005), str. 64



Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

Plan predavanja

Prosti brojevi

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, \ldots$$

"Postoje dvije činjenice o prostim brojevima u koje bih vas htio toliko duboko uvjeriti da zauvijek ostanu urezane u vašim srcima. Prva je, da unatoč njihovoj jednostavnoj definiciji i ulozi gradivnih blokova svih brojeva, prosti brojevi spadaju među najslučajnije i najtvrdoglavije objekte koje matematičari proučavaju: rastu kao korov među prirodnim brojevima, naizgled ne prate nikakav drugi zakon osim zakona slučajnosti, i nitko ne može predvidjeti gdje će sljedeći izniknuti. Druga činjenica je još impresivnija, jer kaže upravo suprotno: prosti brojevi pokazuju zaprepašćujuću pravilnost, postoje zakoni koji upravljaju njihovim ponašanjem i oni prate te zakone s gotovo savršenom preciznošću."

Don Zagier, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn i Collège de France, Paris

Prosti brojevi – što je to?

- Prost broj je onaj koji se ne može napisati kao produkt manjih.
- Na primjer, 7 je prost jer

$$7 = 7 \cdot 1$$

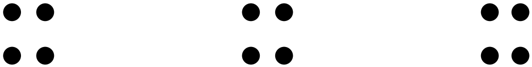
  je jedini rastav broja 7 na produkt.
- Ali 12 nije prost jer

$$12 = 12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3.$$

Prosti brojevi – i hrpe kamenčića

- Hrpa s prostim brojem kamenčića može se podijeliti na jednake manje hrpice jedino tako da u manjim hrpicama bude po jedan kamenčić.
- Hrpa od 7 kamenčića može se podijeliti na jednake manje hrpice jedino ovako

- Hrpa od 12 kamenčića može se podijeliti na jednake manje hrpice s 1, 2, 3, 4 i 6 kamenčića. Na primjer



Teorem

Prostih brojeva ima beskonačno.

Euklidov dokaz.

1. Kad bi prostih brojeva bilo konačno, mogli bismo ih sve pomnožiti i napraviti veeeeliku hrpu s upravo toliko kamenčića. Ta hrpa bi se mogla podijeliti na jednake manje hrpice s bilo kojim prostim brojem kamenčića (od tih konačno mnogo).
2. Ali ako toj hrpi dodamo još jedan kamenčić, on će biti višak u svakoj takvoj podjeli. Dakle, nova hrpa s tim jednim dodanim kamenčićem više se ne može podijeliti na jednake manje hrpice.
3. To znači da smo našli prost broj koji nije među onih konačno mnogo od kojih smo krenuli. Zato ih mora biti beskonačno.

□

Teorem

Prostih brojeva ima beskonačno.

Eulerov dokaz.

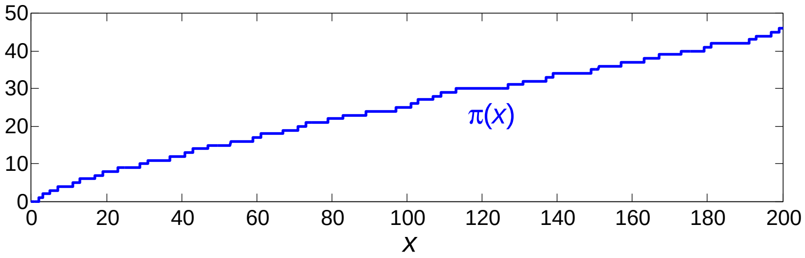
Za $k > 1$ vrijedi

$$1^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^k} \cdot \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \prod_{p \text{ prost}} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p}\right)^k}.$$

Leonhard Euler je promatrao što se dešava kada k postaje jednak 1. Znao je da lijeva strana postane beskonačna. Ali kad bi prostih brojeva bilo samo konačno, desna strana bi morala biti konačna. Dakle, prostih brojeva zaista ima beskonačno. □

- Funkcija $\pi(x)$ broji koliko ima prostih brojeva manjih od x i tako određuje raspored prostih brojeva.
- Cilj je naći što bolju aproksimaciju te funkcije.
- Da bi se proširila Eulerova ideja na $k < 1$ mora se preći u kompleksnu domenu.



Plan predavanja

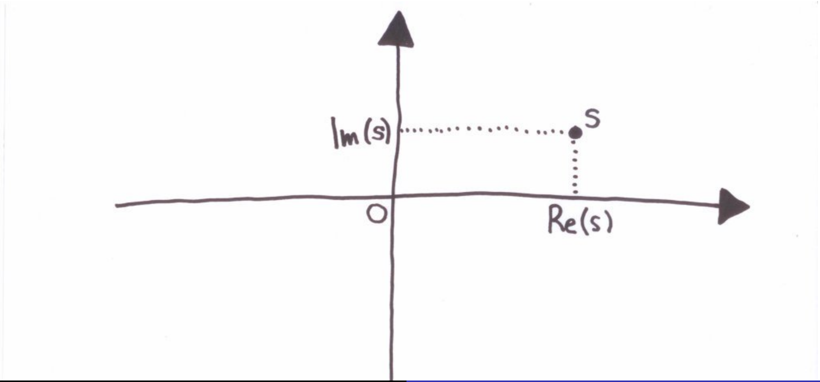
1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

Kompleksna analiza

"Najkraći put između dvije istine u realnoj domeni prolazi kroz kompleksnu domenu."

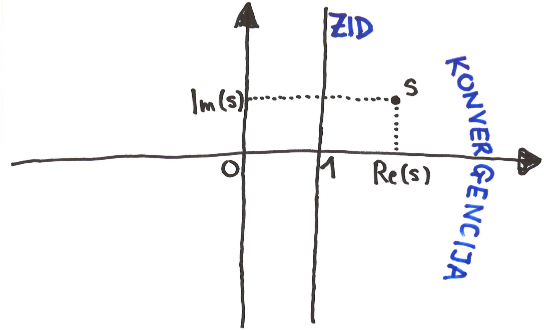
Jacques Hadamard (1865-1963), francuski matematičar

- Ključna prednost prelaska u kompleksnu domenu jest mogućnost korištenja kompleksne analize.

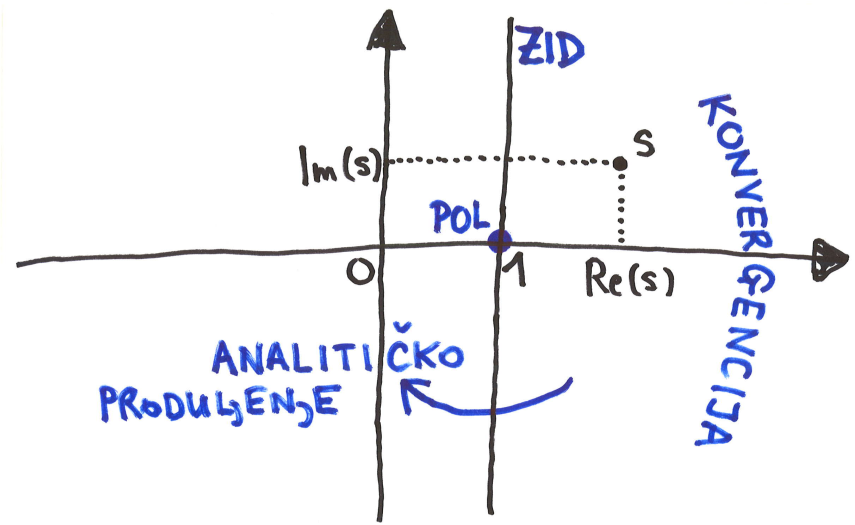


- Bernhard Riemann je u Eulerov izraz umjesto k uvrstio kompleksan broj s:

$$\zeta(s) = 1^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \dots$$



Riemannova zeta funkcija je produljenje od $\zeta(s)$.



Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

Riemannova hipoteza

"Kad bih se probudio iz sna nakon tisuću godina, moje prvo pitanje bi bilo je li Riemannova hipoteza dokazana."

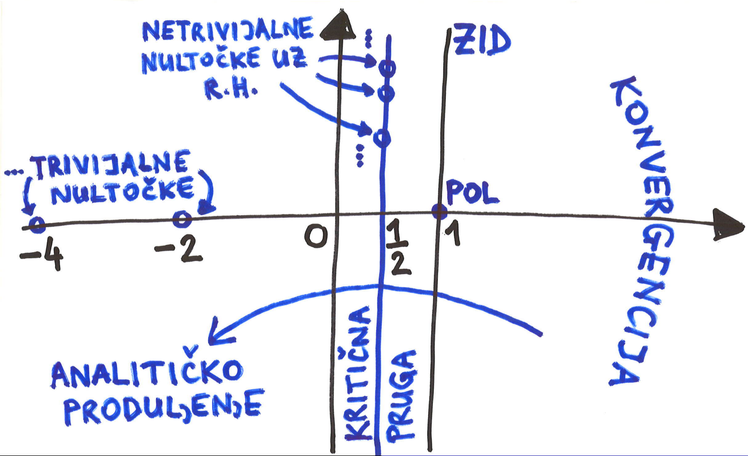
David Hilbert (1862-1943), njemački matematičar

Riemannova hipoteza

Sve netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije $\zeta(s)$ leže na vertikalnom pravcu kroz $1/2$.

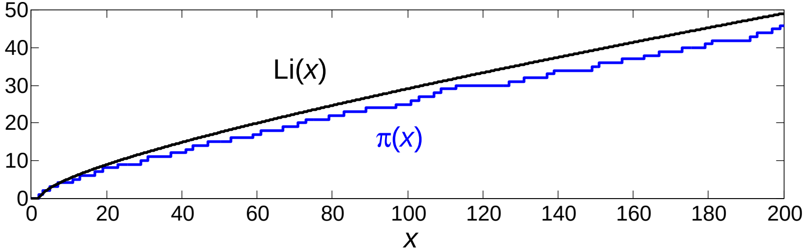
Riemannova hipoteza

Sve netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije $\zeta(s)$ leže na vertikalnom pravcu kroz $1/2$.



Posljedica Riemannove hipoteze

Aproksimacija funkcije $\pi(X)$ funkcijom logaritam integralni $Li(X)$ je "prilično dobra".



Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

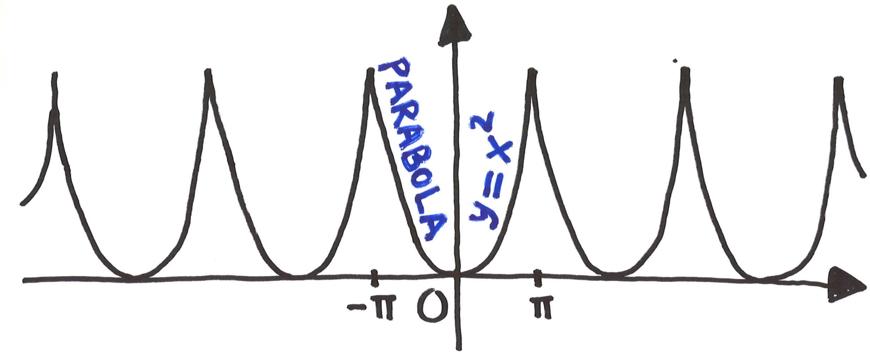
Harmonijska analiza

"Za mene je činjenica da se raspored prostih brojeva može tako precizno prikazati u harmonijskoj analizi sasvim zapanjujuća i neopisivo prekrasna. Ona nam govori o tajanstvenoj muzici i skrivenoj harmoniji koje skladaju prosti brojevi."

Enrico Bombieri, Insitute for Advanced Study, New Jersey, SAD

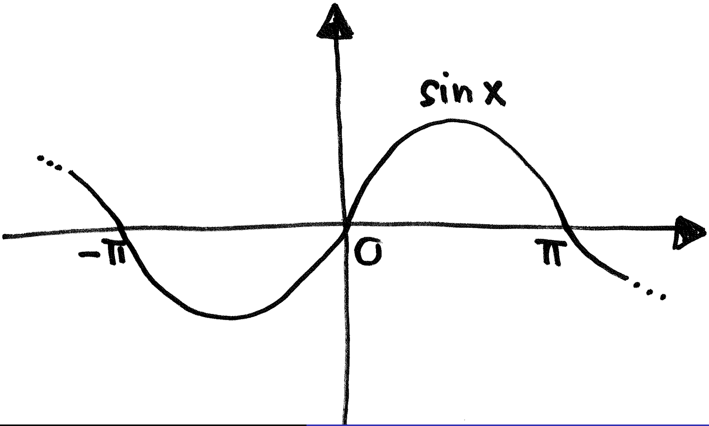
- Cilj je komplicirane funkcije zapisati pomoću "osnovnih".
- Prednosti su brojne, ne samo u matematici, nego i u mnogim primjenama (fizika, elektrotehnika, računarstvo, optika, ekonometrika,...).

- Val (periodičnu funkciju) sa slike zapisuje se preko "osnovnih" valova – sinusa i kosinusa.



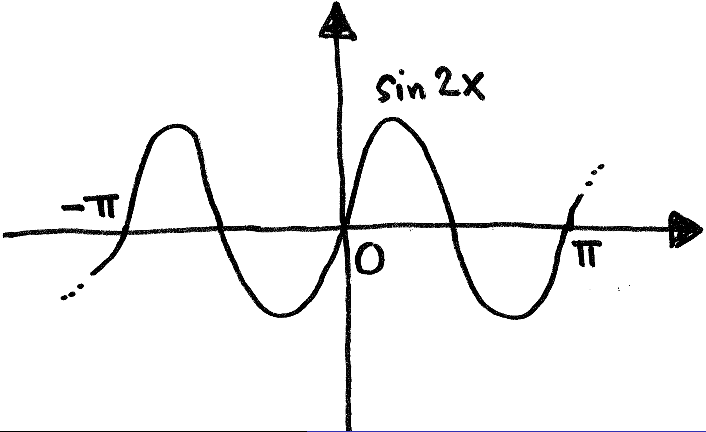
"Osnovni" valovi (funkcije):

Funkcija	1	$\cos x$ $\sin x$	$\cos 2x$ $\sin 2x$	$\cos 3x$ $\sin 3x$	...	$\cos nx$ $\sin nx$	...
Frekvencija	–	1	2	3	...	n	...



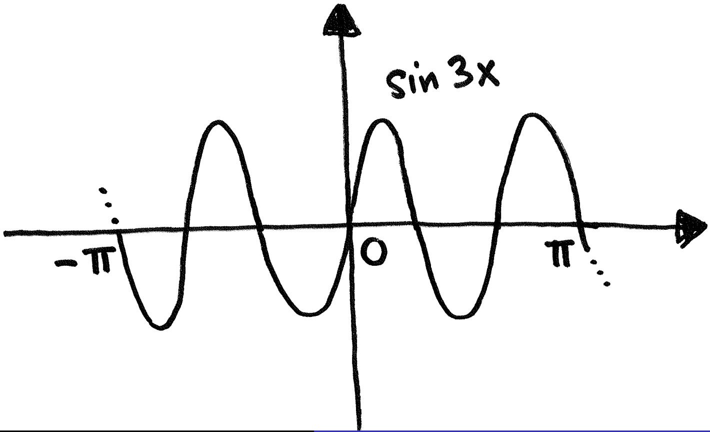
"Osnovni" valovi (funkcije):

Funkcija	1	$\cos x$ $\sin x$	$\cos 2x$ $\sin 2x$	$\cos 3x$ $\sin 3x$	...	$\cos nx$ $\sin nx$	...
Frekvencija	–	1	2	3	...	n	...



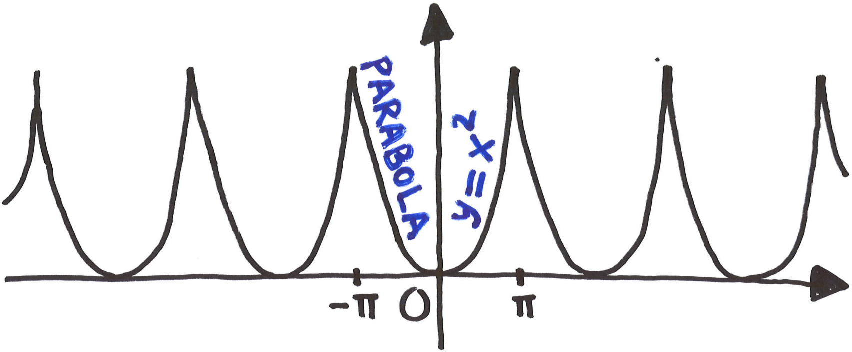
"Osnovni" valovi (funkcije):

Funkcija	1	$\cos x$ $\sin x$	$\cos 2x$ $\sin 2x$	$\cos 3x$ $\sin 3x$	...	$\cos nx$ $\sin nx$	...
Frekvencija	–	1	2	3	...	n	...

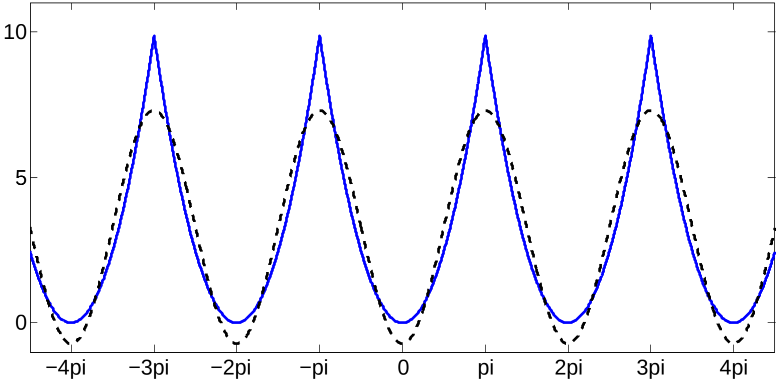


Harmonijska analiza – zapis vala iz primjera

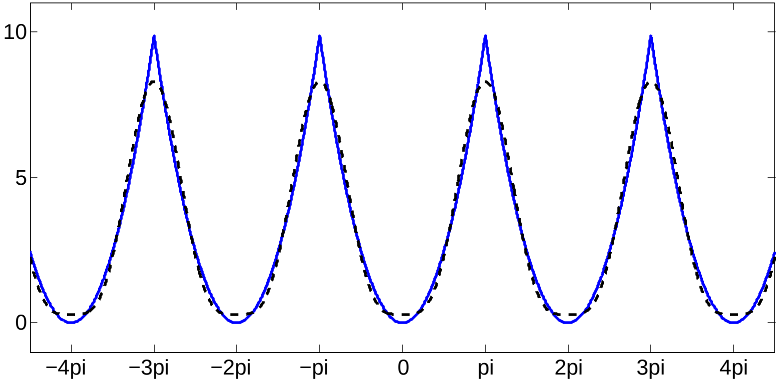
$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2}\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + \frac{4}{4^2}\cos 4x - \dots$$



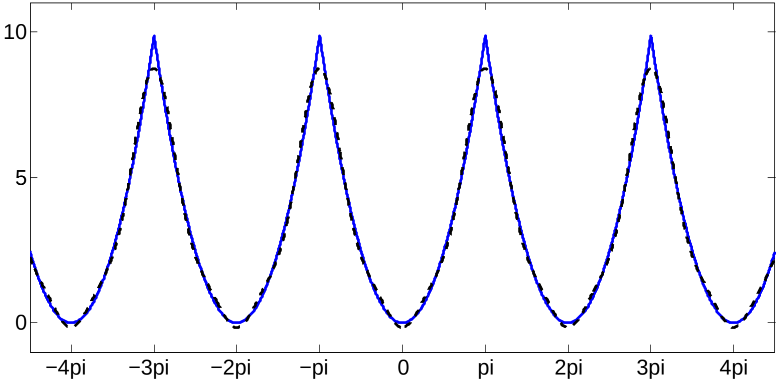
$$n = 1$$



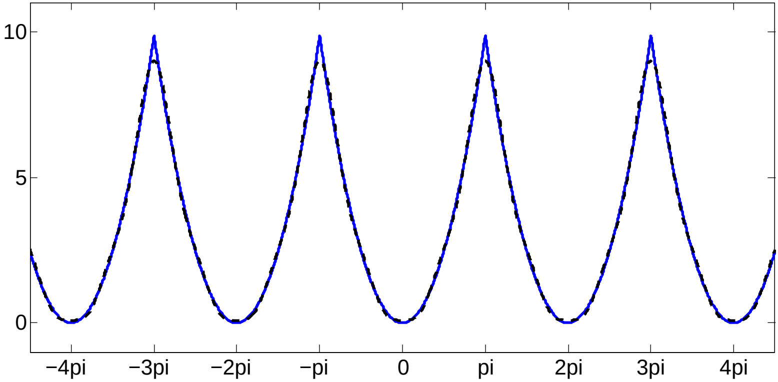
$n = 2$



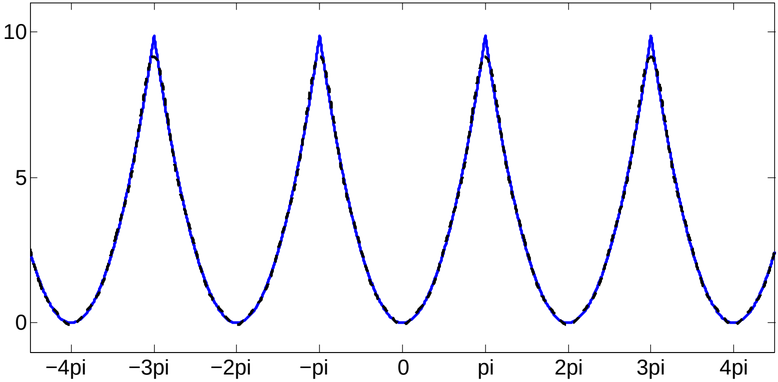
$n = 3$



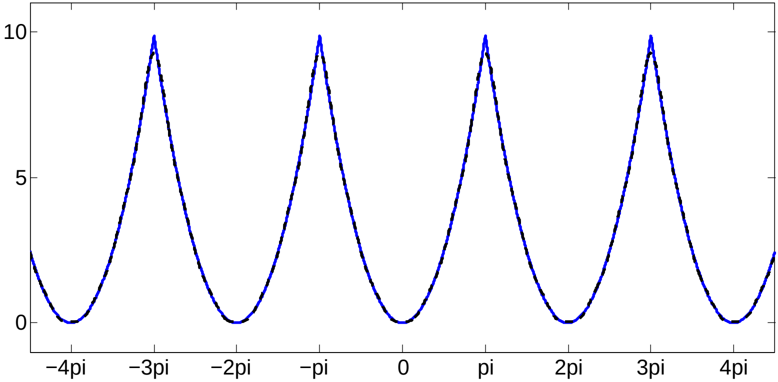
$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$



- Val sa slike (dobiven od parabole) zapisuje se pomoću "osnovnih" valova ovako:

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2}\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + \frac{4}{4^2}\cos 4x - \dots$$

- Uvrstimo $x = \pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right].$$

- Uglata zagrada je $\zeta(2)$ pa se dobije

$$\zeta(2) = \pi^2/6.$$

Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

Djelovanja

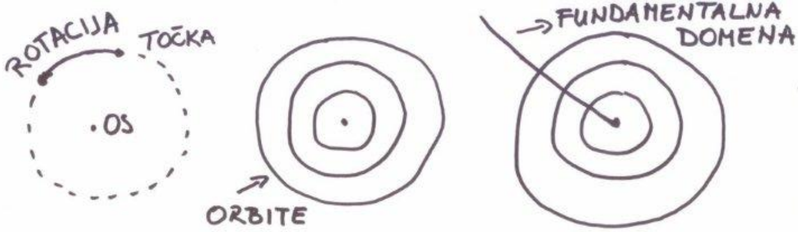
"Suština harmonijske analize je rastavljanje kompliciranih izraza u dijelove koji reflektiraju strukturu djelovanja s ciljem pretvaranja teške analize u nešto prikladnije za proučavanje."

Anthony W. Knapp, State University of New York, Stony Brook, SAD
Group representations and harmonic analysis from Euler to Langlands, part II, *Notices AMS* **43** (1996), 537-549

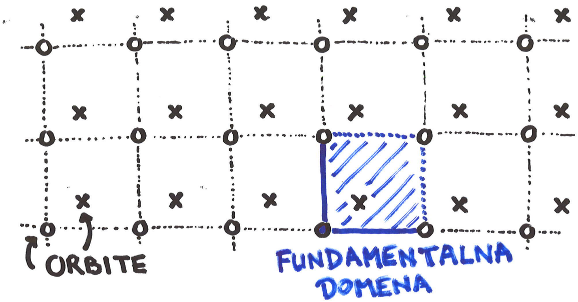
- Dublji razlog zašto je harmonijska analiza toliko efikasna je njena usklađenost s nekakvim algebarskim djelovanjem (translacijama).

Djelovanja – rotacije u ravnini

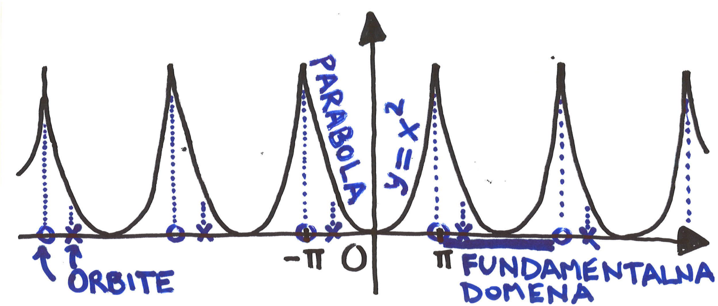
- *Orbita* je putanja po kojoj se točka kreće.
- *Fundamentalna domena* je skup točaka koji svaku orbitu siječe u jednoj točki.



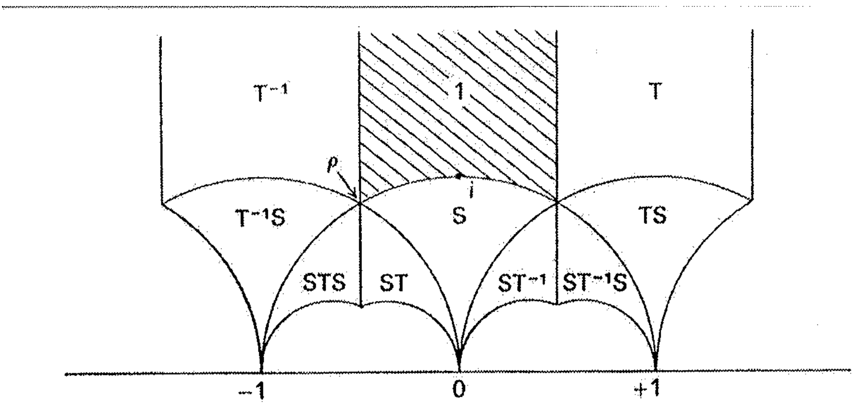
- *Orbita* je putanja po kojoj se točka kreće.
- *Fundamentalna domena* je skup točaka koji svaku orbitu siječe u jednoj točki.



- Harmonijska analiza na pravcu je usklađena s translacijama.



- Slika preuzeta iz [J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, GTM **7**, Springer, 1973].



Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

Modularne forme

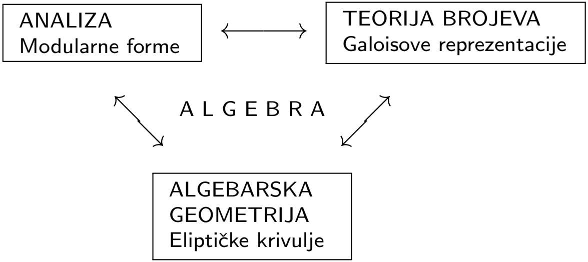
"Pet je osnovnih matematičkih operacija: zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje – i modularne forme."

Martin Eichler (1912-1992), njemački matematičar

- Kao što su sinusi i kosinusi osnovni valovi harmonijske analize na pravcu, tako su modularne forme "osnovni valovi" harmonijske analize u gornjoj poluravnini.
- Sinusi i kosinusi su usklađeni s translacijama, a modularne forme s modularnom grupom.

Modularne forme – veza analize, teorije brojeva i geometrije

- Pomoću modularnih formi može se formulirati duboka povezanost matematičke analize, teorije brojeva i algebarske geometrije.
- To je zapravo prvi i "najjednostavniji" korak u Langlandsovom programu.



Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

"Podijeliti kub u dva kuba, četvrtu ili bilo koju višu potenciju u dvije iste takve potencije je nemoguće. Našao sam prekrasan dokaz te tvrdnje, ali je margina preuska da bi stao."

Pierre de Fermat (1601(?)-1665), francuski pravnik i matematičar
na margini Diofantove knjige *Arithmetica*

Fermatov posljednji teorem

Za $n \geq 3$ ne postoje prirodni brojevi x, y, z takvi da je

$$x^n + y^n = z^n.$$

Fermatov posljednji teorem – dokaz

Prekrasan dokaz koji (jedva) stane na *slide*.

1982. Gerhard Frey je pokazao da kad bi postojalo rješenje, pomoću njega bi se mogla konstruirati eliptička krivulja (tzv. Freyeva krivulja).

1986. Ken Ribet je dokazao, nastavljajući se na rad Jean-Pierre Serrea, da Freyeva krivulja ne može imati vezu s modularnim formama (slika!).

1993.-5. Richard Taylor i Andrew Wiles su dokazali da jedna posebna vrsta eliptičkih krivulja, u koju spada Freyeva krivulja, uvijek ima vezu s modularnim formama (posebni slučaj takozvane Shimura-Taniyama-Weilove slutnje).

Dakle, kad bi Freyeva krivulja postojala morala bi biti imati vezu s modularnim formama, ali znamo da ona to nema. To je kontradikcija pa je Fermatov posljednji teorem dokazan.

$\square$

Plan predavanja

1. Prosti brojevi
2. Kompleksna analiza
3. Riemannova hipoteza
4. Harmonijska analiza
5. Djelovanja
6. Modularne forme
7. Fermatov posljednji teorem
8. Langlandsov program

Langlandsov program

"Iako je uvelike nejasno, a često zahtjeva i visoku razinu [matematičke] tehnike, područje [Langlandsovog programa] privlači puno pažnje svih matematičara: spektakularno rješenje Fermatovog posljednjeg teorema; konkretne slutnje koje su teške, ali ne potpuno nedostupne, [...]; korijeni u prastaroj tradiciji proučavanja algebarskih iracionalnosti; veličanstvena konceptualna arhitektura s posljedicama koje nisu ograničene samo na teoriju brojeva; te ogromna trenutna energija u njemu. [...] Područje [Langlandsovog programa] je dublje nego što sam smatrao, a počinjem sumnjati da je dublje nego što je itko ikad smatrao. Sagledati ga u cjelini je zasigurno zastrašujući, trenutno čak i nemoguć, zadatak. Dobivanje dokaza ozbiljnog rezultata je druga stvar, čak još i teža, te svaki uspjeh zahtjeva enormnu koncentraciju snaga."

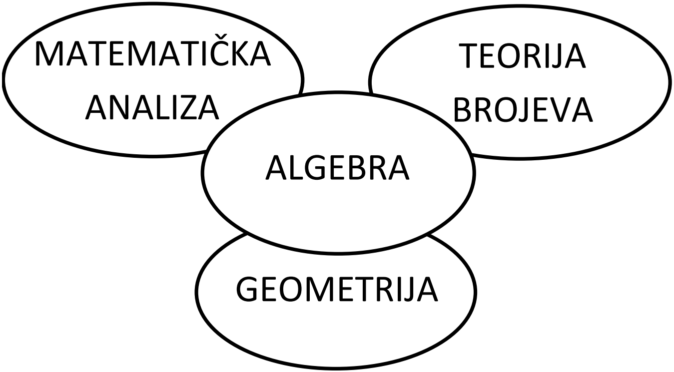
Robert P. Langlands, Institute for Advanced Study, New Jersey, SAD
Review of the book *p-adic automorphic forms on Shimura varieties* by H. Hida,
Bulletin AMS **44** (2007), 291-308

Langlandsov program

- Harmonijska analiza koju smo dosad spominjali ima uvijek geometrijsku i analitičku stranu, usklađenu s nekim algebarskim djelovanjem.
- Takva dualnost geometrijskih i analitičkih objekata, usklađena s algebarskim djelovanjem, danas prožima čitavu matematiku: teoriju grupa, topologiju, diferencijalnu geometriju, teoriju brojeva, algebarsku geometriju, kao i analizu i diferencijalne jednadžbe te fiziku, uz koje je tradicionalno vezana.

Langlandsov program

- Langlandsov program je veličanstveni složeni sustav slutnji koji predstavlja zasigurno najdublji i najmisteriozniji oblik spomenute dualnosti te sjedinjuje matematičku analizu, geometriju i teoriju brojeva kroz algebru.



Langlandsov program

- Jedan od važnih slutnji u Langlandsovom programu bila je takozvana globalna Jacquet-Langlandsova korespodencija za opću linearnu grupu koju su 2008. godine dokazali **Ioan Badulescu i Neven Grbac**.
- Langlandsov program obuhvaća mnoge velike otvorene probleme suvremene matematike, uključujući 3 od 7 milenijskih problema čije rješenje donosi nagradu od milijun dolara.

Langlandsov program

- Važnost se ogleda i u popisu dobitnika Fieldsove medalje te Abelove nagrade. Gotovo u pravilu barem jedan dobitnik Fieldsove medalje dolazi iz područja Langlandsovog programa.
- Jako je malo toga zasada dokazano, ali zbog svoje ljepote, unutarnje simetrije i prirodnosti, kao i velikih dosad dobivenih rezultata, matematičari duboko vjeruju u njegovu točnost te ulažu veliku energiju u njegovo istraživanje.