

Ovogodišnje Riječke matematičke susrete Odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci izvodi Zavod za algebru i teoriju brojeva. Kao glavni cilj ovih Susreta postavili smo si da nastavnicima i učenicima pokušamo približiti znanstveno istraživanje u suvremenoj matematici. Htjeli bismo ovim Susretima odgovoriti na pitanja što zapravo matematičari istražuju, koji su danas glavni veliki otvoreni problemi, kako se svjetska matematika razvija i kako se razvijala kroz povijest te kako funkcionira svjetska matematička zajednica. Smatramo da kroz studije budući nastavnici matematike ne dobiju ove informacije, a važne su pogotovo u radu s nadarenim učenicima koji sve do fakulteta većinom misle da je matematika rješavanje zadataka, možda čak i jako teških, ali nemaju nikakvu percepciju o tome kako se sustavno i koordinirano pristupa stvarno velikim problemima i kako se matematika gradi kroz stoljeća, danas možda brže nego ikad. Često se susrećemo s konstatacijom da je matematika stara i da se sve već zna, a to je toliko daleko od istine, pa bi htjeli ovim Susretima to približiti nastavnicima matematike, koji će to moći prenijeti na mlade generacije.

Motivacija za razvoj matematike. Kroz povijest matematika se uvijek razvija motivirana nekim konkretnim praktičnim problemima. U početku to su bili problemi mjerenja zemljišta, iz čega je nastala geometrija, te problemi vođenja knjiga i poreza, što je donijelo začetak aritmetike. Primjerice, Pitagorin poučak nije nastao kao svojstvo pravokutnog trokuta, nego je zapravo metoda kako provjeriti je li neki kut pravi pri gradnji objekata ili podjeli zemljišta.

Kasnije, tokom stoljeća, najvažniji dijelovi matematike nastali su motivirani iz dva izvora. Prvi izvor je fizika i njene primjene,

čiji razvoj je zahtijevao sve složeniju i složeniju matematiku, što je donijelo razvoj posebno matematičke analize, ali i algebre kroz pokušaj nalaženja nultočki polinoma. Drugi izvor motivacije je teorija brojeva, koja u prošlosti nije možda imala toliko primjene kao danas u računarstvu i kriptografiji, ali je oduvijek inspirirala velike matematičare čime je dovela do razvoja algebre, ali i svih drugih područja matematike.

Matematika prije 20. stoljeća. Od renesanse pa do početka 20. stoljeća matematika je doživjela izuzetan razvoj. Niz velikih matematičara poput Gaußa, Newtona, Leibniza, Cauchyja, Laplacea, Galoisa, Abela, Dirichleta, Riemanna... donijeli su nam rođenje infinitezimalnog računa, harmonijske analize, diferencijalnih jednadžbi, moderne algebre uključujući Galoisovu teoriju, novih geometrija, teorije skupova... Međutim, u to vrijeme stil matematičkog pisanja je bio vrlo neprecizan. Čitanje tadašnjih znanstvenih radova je vrlo složeno, iskazi tvrdnji su neprecizni, dokazi su opisni, neki koraci su često preskočeni ili vrlo nejasno provedeni, na primjer samo prikazani slikom.

Hilbertovi problemi. Matematičari su vrlo rano započeli zajednički raditi i razmjenjivati svoja saznanja, bez obzira na granice i podjele, kao što je David Hilbert rekao “Mathematics knows no races or geographic boundaries; for mathematics, the cultural world is one country.”¹ Tako da nije čudno da se već 1897. godine održao prvi ICM – *International Congress of Mathematicians*. Od tada se, uz manje prekide oko svjetskih ratova, ICM održava svake četiri godine. U vrijeme kada komu-

¹Matematika ne poznaje rase ni zemljopisne granice; za matematiku je čitav kulturni svijet jedna zemlja.

nikacija nije bila tako jednostavna kao danas, to je bio značajan iskorak i mjesto razmjene ideja i planova, dogovora kako pristupati teškim problemima, što je toliko važno za razvoj matematike. Niti jedna matematička knjiga ili članak, ma koliko dobro napisana, ne može zamijeniti direktni razgovor o matematici.

Jedno od najvažnijih matematičkih predavanja ikada je zasigurno predavanje Davida Hilberta na drugom ICM-u 1900. godine. U njemu Hilbert poziva matematičare na preciznost u pisanju i iskazivanju matematičkih tvrdnji te na potpunost i preciznost u pisanju dokaza. Ali osim toga Hilbert navodi 23 problema koji će po njegovom mišljenju obilježiti stoljeće koje dolazi. Ti problemi, koji su postali poznati pod imenom Hilbertovi problemi, ne samo da su obilježili stoljeće koje dolazi, nego je Hilbert na neki način i usmjerio razvoj same matematike jer su se matematičari u narednim godinama koncentrirali na njegove probleme i time razvili cijela nova područja matematike.

Erlangen program. Krajem 19. stoljeća, Felix Klein je proučavajući geometriju, inspiriran pojavom hiperboličke i Riemannove geometrije, shvatio da je suština geometrije u tome koje transformacije prostora ili ravnine čuvaju svojstva geometrijskih objekata koji se proučavaju. To je dovelo do formuliranja Erlangen programa, prvog velikog programa u matematici. Program je sustav ideja i očekivanih rezultata, zajedno s razlozima, ponekad vrlo nepreciznim, zašto bi oni morali vrijediti, za koje matematičari iz nekog dubokog razloga vjeruju da moraju biti točni, ali u trenutku formiranja programa nije uopće jasno na koji način do njih doći i koliko će vremena proteći do ispunjenja ciljeva programa.

U konkretnom slučaju Erlangen programa, cilj je bio alge-

braizirati geometriju. To znači, opisati geometriju kao grupu transformacija koje djeluju na bilo kakvom prostoru i geometrijske tvrdnje dobivati iz algebarskih svojstava tih transformacija. Na taj način se geometrija riješila našeg geometrijskog zora, koji je ograničen, i nastalo je bezbroj geometrija koje možemo sustavno proučavati i koje su važne u raznim područjima matematike, ali i primjenama. U tom svjetlu treba gledati poznati Dieudonnéov uzvik “smrt trokutima”, koji neki često predoslovno shvaćaju i smatraju glupošću, a zapravo je odraz stvarnog stanja u današnjoj matematici.

Bourbaki. Početkom 20. stoljeća matematika je zaista postala nešto preciznija, kao što je Hilbert želio. Inspirirana novim pogledom na geometriju, posebno jako se razvila moderna apstraktna algebra u radovima Schura, Frobeniusa, Emmy Noether, Artina... Nakon prvog svjetskog rata, početkom 1930-tih godina, mlada generacija matematičara, među ostalima H. Cartan, Chevalley, Coulomb, Delsarte, Dieudonné, Weil... odlučuje u potpunosti reformirati matematiku i po prvi put precizno postaviti temelje matematike pa nakon toga formulirati precizno sva područja matematike. U tu svrhu osnovali su tajno društvo matematičara, u kojem su bili neki od vodećih matematičara toga vremena, te su odlučili napisati niz knjiga i objavljivati ih pod zajedničkim pseudonimom Nicolas Bourbaki.

Cilj je bio toliko sveobuhvatan, očekivani nivo preciznosti toliko velik, a metoda rada u kojoj bi se svaki detalj morao usuglasiti konsenzusom toliko dugotrajna, da je do objavljivanja prve knjige prošlo više od 20 godina. Obično bi netko dobio zadatak napisati neki dio knjige, da bi onda na sastancima ostali to kritizirali do te mjere da bi se vrlo često čitava poglavlja ba-

cala u smeće i kretalo iznova. Rezultat je niz knjiga, koji počinje s osnovama matematike koja je bazirana na teoriji skupova, a pokriva i neka specijalizirana područja, poput Liejevih grupa i algebri ili teorije mjere i integrala.

Utjecaj Bourbakija je bio toliko velik da je, najprije u Francuskoj, a kasnije i kod nas, postalo moderno uvoditi bourbakističke metode u nastavu matematike od najranije dobi. Iz tog doba kruži vic u kojem učenik prvog razreda osnovne škole na pitanje koliko je $2 + 3$ odgovara s $3 + 2$, jer važniji je zakon komutativnosti od samog računa.

Langlandsov program. Robert P. Langlands je 1970.-tih godina shvatio kako se neki poznati rezultati, na primjer Artin i Tateova *class field theory*, mogu objasniti i uklopiti u sustav korespondencija između različitih matematičkih objekata koji izgleda tako savršen i prekrasan jer dolazi od nekih prirodnih svojstava promatranih objekata. Tako je nastao Langlandsov program, najvažniji program suvremene matematike. Njega se često poistovjećuje po važnosti s ujedinjenom teorijom svih sila u fizici i smatra se završnim odrazom simetrije čitave matematike. Obuhvaća neke od najtežih otvorenih, ili tek nedavno dokazanih, matematičkih problema današnjice poput Riemannove hipoteze, Ramanujanove i Selbergove slutnje, slutnje Bircha i Swinnerton-Dyera i posljednjeg Fermatovog teorema. Zapravo ti rezultati su samo djelić ili čak obična posljedica svega onoga što Langlandsov program predviđa.

Langlandsov program se može gledati kao na izuzetno duboku, skrivenu, ali jako prirodnu, vezu između tri glavna područja matematike, matematičke analize, geometrije i teorije brojeva, koja je usklađena i na neki način uvjetovana s algebrom. Zbog

takve suštinske povezanosti različitih područja i veze preko algebre, te više primjera u kojima su majušni djelići programa dosada potvrđeni, matematičari vjeruju da su predviđene korespondencije u Langlandsovom programu točne.

Kao što je Erlangen program stotinjak godina ranije revolucionarizirao i algebraizirao geometriju, što je u 20. stoljeću donijelo algebraizaciju i drugih područja matematike, tako u današnje vrijeme Langlandsov program ima za cilj objedinjavanje važnih objekata iz svih područja matematike.

Fieldsova medalja i Abelova nagrada. Ove dvije nagrade danas se smatraju najvećim priznanjima u matematici. Fieldsova medalja dodjeljuje se svake četiri godine na ICM-u. Prve su dodijeljene 1934. godine, a zatim druge, zbog pauze oko svjetskog rata, tek 1950. godine. Dobitnici mogu biti do četvero matematičara ne starijih od 40 godina. Abelova nagrada je na neki način nagrada za životno djelo. Dodjeljuje se svake godine počevši od 2003. godine.

Milenijski problemi Clay Instituta. Na prelasku u 21. stoljeće, inspiriran Hilbertovim predavanjem 100 godina ranije i njegovim problemima, matematički institut Clay je odlučio napraviti listu problema koji će obilježiti 21. stoljeće. Nekoliko vodećih matematičara iz raznih područja angažirano je na sastavljanju ove liste, a ovaj put, rješenje svakog od problema donosi i nagradu od milijun dolara. Tako zvani milenijski problemi su sljedeći:

1. Postojanje Yang–Millsove teorije i maseni razmak,
2. Riemannova hipoteza,
3. P vs. NP problem,

4. Navier–Stokesova jednadžba,
5. Hodgeova slutnja,
6. Poincaréova slutnja,
7. Slutnja Bircha i Swinnerton-Dyera,

Ideja ovih Riječkih matematičkih susreta je približiti nastavnicima i učenicima neke od ovih problema, kako bi dobili dojam o samim problemima, matematiци koja je potrebna da bi se oni uopće postavili, kao i trenutnom statusu i pokušajima njihovog dokaza. Dosad je dokazana samo Poincaréova slutnja, koju je 2003. godine dokazao Grigori Perelman.

Za čitanje na moru. Na kraju, evo nekoliko naslova koje smatramo da bi svatko koga interesira matematika trebao pročitati, a pogotovo nastavnici matematike, koji će pročitano moći preneti mladima...

- [1] Eugene Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics* Vol. 13 (1960), No. I.

<http://www.maths.ed.ac.uk/aar/papers/wigner.pdf>

Klasični esej u kojem Wigner raspravlja zašto je matematika, kao konstrukt našeg uma, toliko efikasna u primjenama. Wigner je bio fizičar koji je prvi upotrijebio apstraktnu algebru u kvantnoj fizici pri opisu modela atoma.

- [2] Godfrey H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

<https://www.math.ualberta.ca/mss/misc/A%20Mathematician%27s%20A>

Esej iz 1940. u kojem Hardy objašnjava što je matematika, što motivira matematičare i kako nastaje matematika. Pritom se ispričava jer smatra da je teorija brojeva, kojom se on bavio, potpuno beskorisna izvan matematike. Ispostavilo se da se i neki njegovi teoremi, ili barem teoremi bazirani na njegovima, koriste u teoriji kodiranja, kriptografiji i računarstvu.

- [3] Cédric Villani, *The Birth of a Theorem: A Mathematical Adventure* [prevod s franc. *Théorème vivant*], The Bodley Head, London, 2015.
Knjiga u kojoj Villani, dobitnik Fieldsove medalje, opisuje svoj tok misli i događaja koji su doveli do dokaza jednog njegovog teorema. Gotovo kao dnevnik u kojem su uključena razmišljanja i osjećaji koji su ga pratili tokom više od godine dana pokušaja da dokaže taj teorem.
- [4] Timothy Gowers (editor), *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
Ova knjiga, koju je uredio još jedan dobitnik Fieldsove medalje, nije baš za na more sa svojih preko 1000 stranica. Svejedno to je valjda najkompletnija knjiga za nekoga tko bi htio znati što sve rade suvremeni matematičari, detaljno po svim uskim područjima, s pojašnjenjima i definicijama najvažnijih pojmova.
- [5] Nicholas J. Higham (editor), *The Princeton Companion to Applied Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015.

Slično kao prethodna knjiga, ova knjiga je kompletan izvor za primijenjenu matematiku.